www.r0x.it

Forum degli Studenti di Ingegneria dell'Università di Salerno

Gestito da
Associazione StudentIngegneria
Sede: Aula T25/1 – 089/96-4166
studentingegneriasalerno@gmail.com
www.r0x.it – www.studentingegneria.it

ESAME DI MATEMATICA III – Prof. Scarpetta

A.A. 2009/2010 - Prova scritta del 3 Settembre 2010

Nel piano verticale O*xy*, un'asta rigida AB di massa *M* e lunghezza 3ℓ è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'asse *z* in O di versore $\mathbf{e}_3$ (|OB| = 2|AO|); oltre alla reazione vincolare e alla forza peso, su di essa agisce la forza attiva $\boldsymbol{F} = \lambda \mathbf{e}_3 \times (B - B^*)$ applicata in B, ove B* è la proiezione di B sulla retta $y + a = 0$. Scrivere l'equazione pura del moto dell'asta, e calcolare le eventuali posizioni d'equilibrio, discutendone la stabilità, nel caso $a = 12\lambda\ell + Mg = 0$.
Calcolare inoltre la reazione vincolare in O all'equilibrio.

2) Nel piano verticale O*xy*, un punto materiale P di massa *m* è vincolato a muoversi sulla retta (liscia o scabra) bisettrice del 2° e 4° quadrante. Oltre alla forza peso e alla reazione vincolare, esso è soggetto alle forze attive $\boldsymbol{F}_1 = k(P^* - P)$ e $\boldsymbol{F}_2 = \lambda(P - O) \times \mathbf{e}_3$, ove P* è la proiezione di P sulla retta $x + a = 0$. Scrivere l'equazione del moto di P e calcolare la reazione vincolare; discutere inoltre l'equilibrio: nel caso liscio con studio della stabilità, nel caso scabro ponendo $\mu = \sqrt{2}/2$, $k = 0$, $\lambda > 0$.

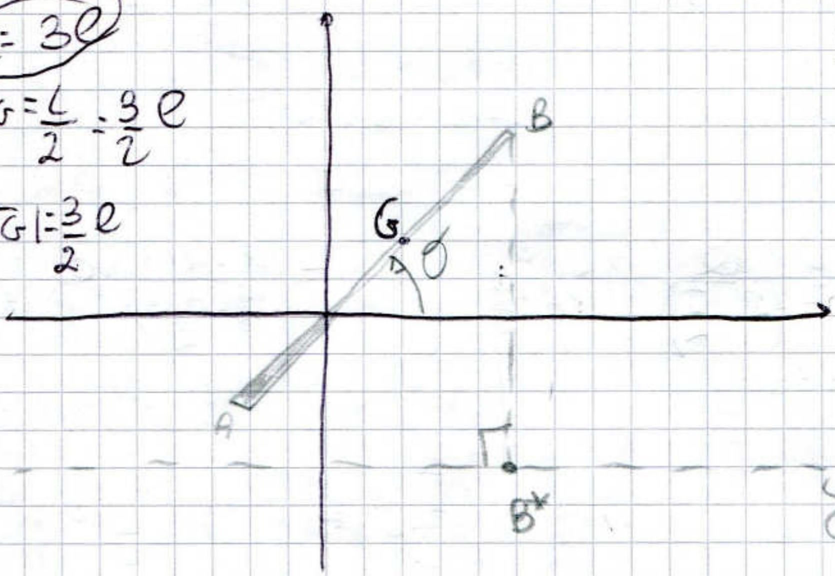
3) Nel piano O*xy*, si consideri un cerchio di centro O e raggio R a cui è sottratto un settore circolare retto nel 2° quadrante di centro O e raggio r = R/2.
Si determinino baricentro e matrice d'inerzia (risp. O) della figura risultante, nonchè gli assi e i momenti principali rispetto a O.

3/09/10

$L = 3\ell$

$AG = \frac{L}{2} = \frac{3}{2}\ell$

$|BG| = \frac{3}{2}\ell$



$\underset{\sim}{F} = \lambda [e_3 (B - B^*) \text{ in } B$

B^* è la proiez. di B sulla retta $y + a = 0$

$a = 0 \quad 12\lambda + Mg = 0$

$\theta = x\hat{O}B$

$$\begin{cases} x_B = 2\ell \cos\theta \\ y_B = 2\ell \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$y_G = \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta$

$|BO| = 2\ell \Rightarrow |BO| - |BG| = 2\ell - \frac{3}{2}\ell = 0$

$I_z \ddot{\theta} = M_z^{(e,a)} = (G - O) \times M\underset{\sim}{g} \cdot \underset{\sim}{e}_3 + (B - O) \times \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{e}_3$

$I_z = I_{z_G} + M|GO|^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\frac{\ell^2}{4} = \frac{9}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 = M\ell^2$

$F_x = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & y_B - y_{B^*} & 0 \end{vmatrix} = -\lambda (y_B - y_{B^*}) = -\lambda (2\ell \operatorname{sen}\theta + a)$

$$F_y = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2l\operatorname{sen}\theta + a & 0 \end{vmatrix} = -\lambda(0) = 0$$

$$M_z^{(e,a)}(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{l}{2}\cos\theta & \frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2l\cos\theta & 2l\operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\lambda(2l\operatorname{sen}\theta + a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\ldots Mg\frac{l}{2}\cos\theta + [\lambda(2l\operatorname{sen}\theta + a)](2l\operatorname{sen}\theta) = I_z\ddot{\theta}$$ se $a = 0$ e

$Mg = -12\lambda l$

$$M_z^{(e,a)}(\theta) = 4\lambda l^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{2l\,a\lambda\operatorname{sen}\theta} + 6\lambda l^2\cos\theta$$

per gli equilibri

$M_z^{(e,a)}(\theta_e) = 0$

$\cancel{4}\operatorname{sen}^2\theta_e + \overset{3}{\cancel{6}}\cos\theta_e = 0 \rightarrow \cancel{2(\ldots)}\ 2 - 2\cos^2\theta_e + 3\cos^2\theta_e = 0$

$\cancel{2 + \cos^2\theta_e = 0 \quad \cos\theta_e}\ \ 2\cos^2\theta_e - 3\cos\theta_e - 2 = 0$

$$\cos\theta_e = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 2 \text{ impossibile} \end{cases}$$

$\theta_e = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$U'(\theta) = M_z(\theta) = 4\operatorname{sen}^2\theta + 6\cos\theta$

$U''(\theta) = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 6\operatorname{sen}\theta$

$U''\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 8\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ posizione stabile

$U''\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}6 > 0$ instabile

Reaz. vincolare all'equilibrio

$0 = \underset{\sim}{Mg} + \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{\Phi_0} = \underset{\sim}{0}$

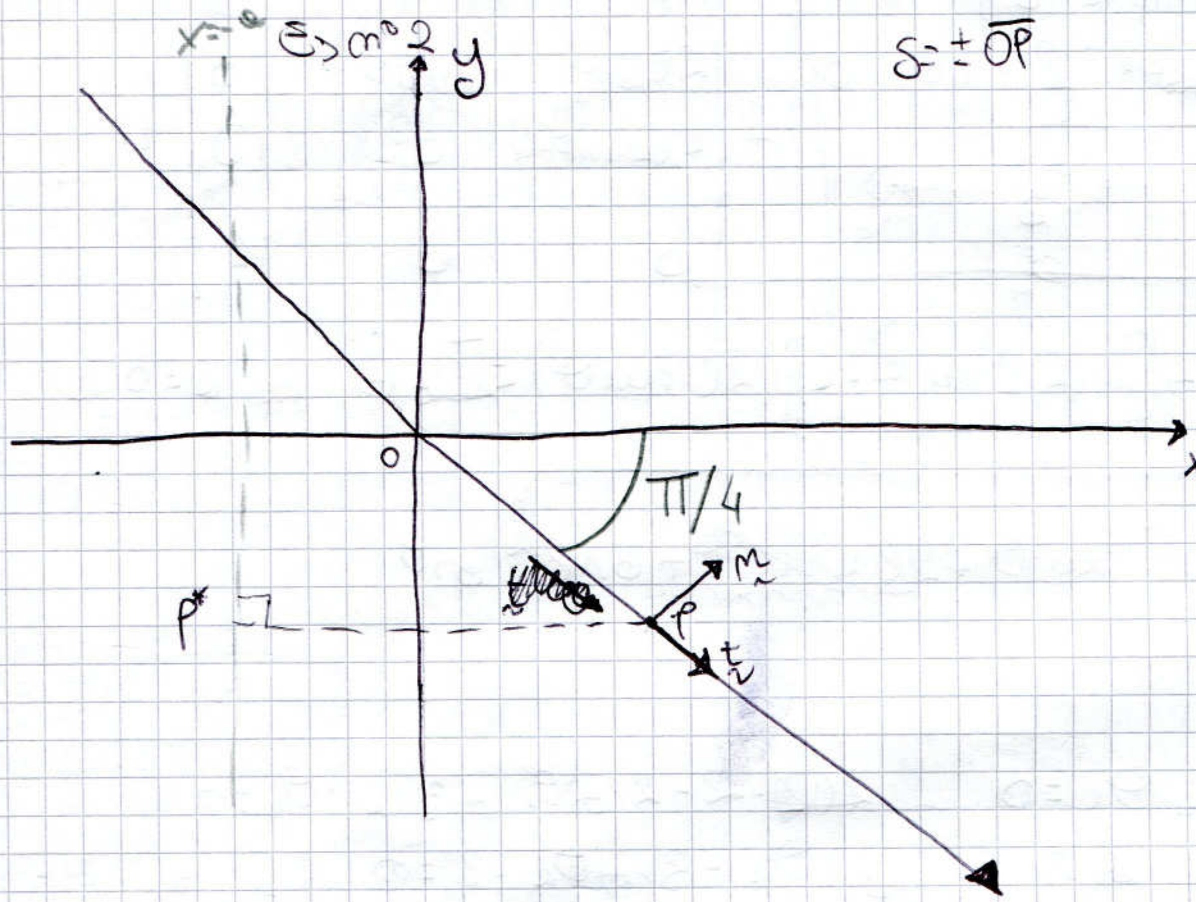
$\Phi_{0x} = -\cancel{Mg_x} - F_x \rightarrow \Phi_{0,x} = \lambda 2l\operatorname{sen}\theta + a$

$\Phi_{0,y} = -Mg - \cancel{F_y} \rightarrow \Phi_{0,y} = -Mg$

$$\begin{cases} I_{0,x}^{(e)}\left(\theta_e = \frac{1}{3}\pi\right) = 2\lambda e \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\lambda e \\ I_{0,x}^{(e)}\left(\theta_e = \frac{4}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}\,\lambda e \end{cases}$$

Es n° 2

$s = \pm \overline{OP}$



$F_1 = K(P^* - P)$

$F_2 = \lambda(P - O) \times e_3$

$t_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} n_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p = s\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_p = -\frac{\sqrt{2}}{2} s = y_{p^*} \end{cases}$$

$F_{1,x} = K(x_{p^*} - x_p) = K\left(-a - \frac{\sqrt{2}}{2} s\right)$

$F_{1,y} = K(y_{p^*} - y_p) = 0$

$$F_{2,x} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s & -\frac{\sqrt{2}}{2}s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda\frac{\sqrt{2}}{2} s$$

$$F_{1,y} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s & -\frac{\sqrt{2}}{2}s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda s$$

Caso liscio

$$m\ddot{s} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg + F_1 t_x = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{\sqrt{2}}{2}K\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}s\right) - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda s\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda s\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$m\ddot{s} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{\sqrt{2}}{2}K\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}_{\mathcal{F}_t(s) = U'(s)}$$

$$\mathcal{F}_t(s_e) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{\sqrt{2}}{2}Ka - \frac{1}{2}Ks_e = 0 \Rightarrow$$

$U''(s_e) = -\frac{k}{2}$ posizione stabile

$0 = \Phi_n + \mathcal{F}_n = \left(\frac{m\dot{s}^2}{\rho} = 0 \text{ nella retta}\right)$

$\Phi_n = -\mathcal{F}_n = -\left[m\underset{\sim}{g} \cdot \underset{\sim}{n} + \underset{\sim}{F_1} \cdot n - \underset{\sim}{F_2} \cdot \underset{\sim}{n}\right]$

$$\Phi_n(s) = -\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}mg + \frac{\sqrt{2}}{2}K\left(-a - \frac{\sqrt{2}}{2}s\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda s \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

praticamente $F_{1x} \cdot n_x + F_{1y} \cdot n_y$ ecc.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}mg + \frac{\sqrt{2}}{2}Ka + \frac{1}{2}Ks + \lambda s = \Phi_n(s)$$

$\Phi_n^{(e)} = \Phi_n(s_e)$: sostituiamo s_e in qst equazione

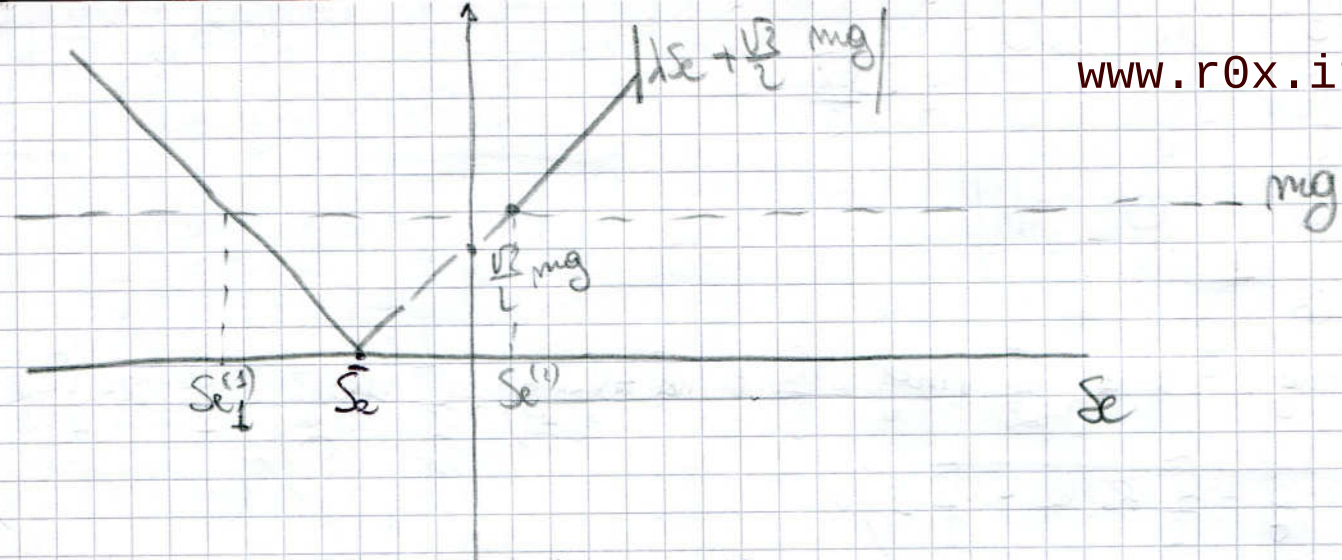
Caso scabro $\mu = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $K = 0$ $\lambda > 0$

$$|\mathcal{F}_t(s_e)| \leq \mu \, |\mathcal{F}_n(s_e)|$$

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}mg - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}Ka} - \cancel{\frac{1}{2}Ks_e}\right| \leq \mu \left|\frac{\sqrt{2}}{2}mg + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}aK} + \left(\cancel{\frac{K}{2}} + \lambda\right)s_e\right|$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}mg \leq \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}mg + \lambda s_e\right| -$$

$\Rightarrow$



$$\delta e \in]-\infty, \delta e^{(1)} \cup [\delta e^{(2)}, +\infty]$$

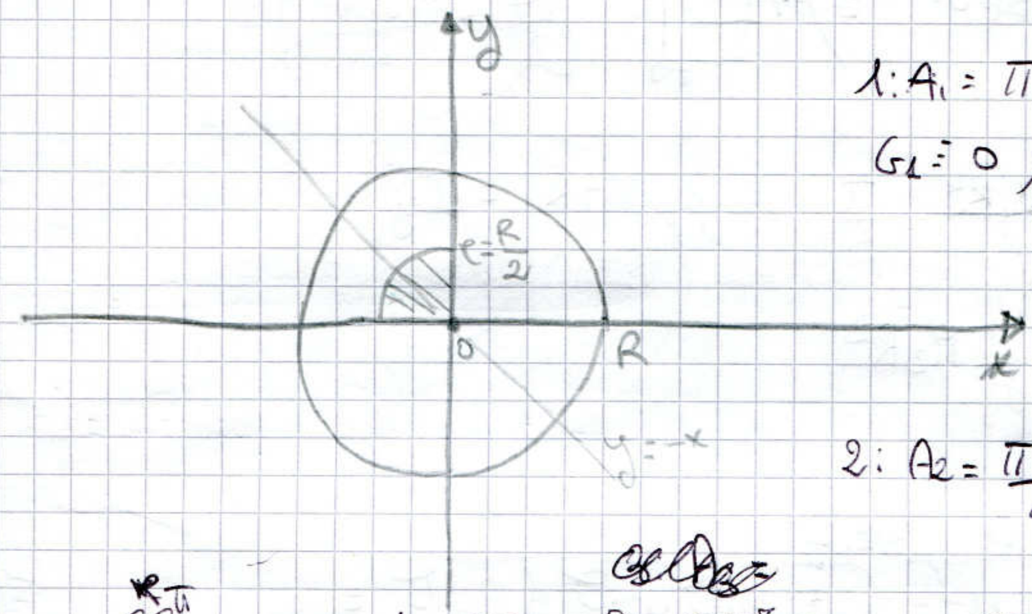
$$\delta e^{(1)} : mg = -\lambda \delta e^{(1)} - \frac{\sqrt{2}}{2} mg$$

$$\delta e^{(1)} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2\lambda} mg$$

$$\delta e^{(2)} \Rightarrow mg = \lambda \delta e^{(2)} + \frac{\sqrt{2}}{2} mg \Rightarrow \delta e^{(2)} = \frac{mg(2-\sqrt{2})}{2\lambda}$$

$$\bar{\delta e} : \lambda \bar{\delta e} + \frac{\sqrt{2}}{2} mg = 0 \Rightarrow \bar{\delta e} = -\frac{\sqrt{2}\, mg}{2\lambda}$$

Es. no 3



$1: A_1 = \pi R$

$G_1 = 0$;

$\bar{y}$

$2: A_2 = \frac{\pi \rho^2}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{16} R^2$

$A_2 x_{G_2} = \int_0^{\rho} \int_{\pi/2}^{\pi} \rho \cos\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\rho} \left[+\sin\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{\rho^3}{3} =$

$= -\frac{(R/2)^3}{3} = -\frac{R^3}{24} \Rightarrow x_{G_2} = -\frac{1/24}{\pi/16} R = -\frac{2}{3\pi} R$

$y_{G_2} = -x_{G_2} = \frac{2}{3\pi} R$ x la $y = -x$ asse di simmetria della figura 2

$3: A_3 = A_1 - A_2 = \pi R^2 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{16} \pi R^2$

$x_{G_3} = \cancel{\frac{A_1}{A_3} \cdot x_{G_1}} - \frac{A_2}{A_3} x_{G_2} = -\frac{\frac{\pi R^2}{16}\left(\frac{2}{3\pi} R\right)}{\pi R^2 \frac{15}{16}} = \frac{2}{45\pi} \cdot R$

$y_{G_3} = \cancel{\frac{A_1}{A_3} y_{G_1}} - \frac{A_2}{A_3} y_{G_2} \Rightarrow y_{G_3} = -\frac{\pi R^2/16}{\pi R^2 \, 15/16} \cdot \frac{2}{3\pi} R =$

$= -\frac{2R}{45\pi}$

$I_{x_1}^{(1)} = \mu \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta = \mu \frac{1}{4} R^4 \pi = \frac{1}{4} M_1 R^2$

$I_{y_1}^{(1)} = \frac{1}{4} M_1 R^2$

$I_z^{(1)} = I_y^{(1)} + I_x^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 R^2$

$$I_x^{(2)} = \mu \int_0^{R/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta = \mu \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{R/2} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right] =$$

$$= \mu \frac{R^4}{64}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \mu \frac{R^4}{64} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16} M_2 R^2 = I_y^{(2)}$$

$$I_z^{(2)} = I_x^{(2)} + I_y^{(2)} = \frac{1}{8} M_2 R^2$$

$$\cancel{I_{h,k} = \rho^2}$$

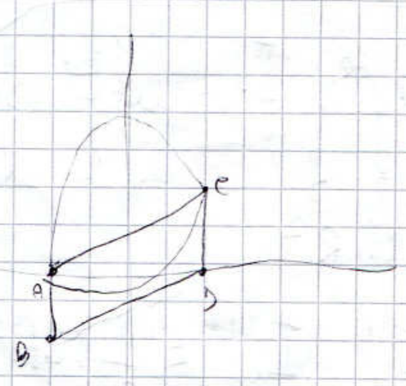
$$I_{xy}^{(1)} = 0$$

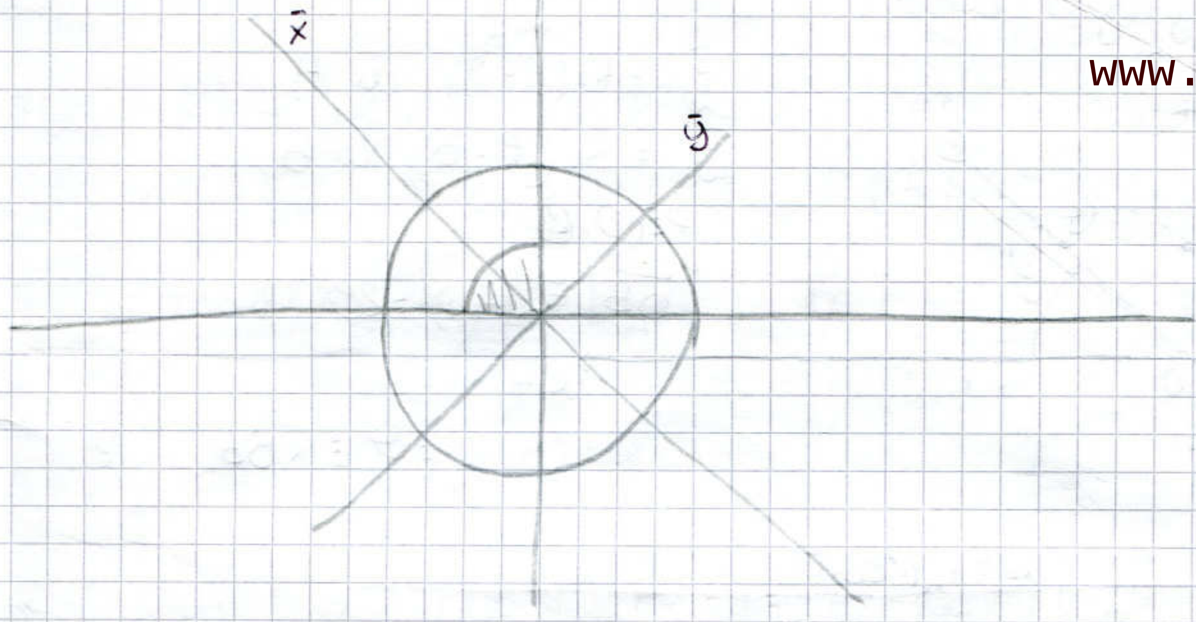
$$I_{xy}^{(2)} = -\mu \int_0^{R/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$= -\mu \frac{1}{4} \frac{R^4}{16} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{4} \mu \frac{1}{16} R^4 \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} \mu \frac{1}{16} R^4 \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{8\pi} M_2 R^2$$

$$I_{h,k} = \begin{pmatrix} \frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16} & -\frac{M_2}{8\pi} & 0 \\ -\frac{M_2}{8\pi} & \frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_1}{2} - \frac{M_2}{8} \end{pmatrix} \cdot R^2$$





Assi principali $\quad y = -x \; : \; \bar{x} \rightarrow \alpha_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad y = x \; : \; \bar{y} \rightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad z = z \; : \; \bar{z} \rightarrow \alpha_1 = 0 \;,\; \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = 1$

$$\bar{I}_{\bar{x}} = R^2\left[\left(\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16}\right)\alpha_1^2 + \left(\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16}\right)\alpha_2^2 + 2 I_{xy} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2\right] =$$

$$= R^2\left[\left(\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16}\right)\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{M_1}{8\pi}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= R^2\left[\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16} + \frac{M_2}{8\pi}\right]$$

$$I_{\bar{y}} = R^2\left[\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16} + 2\left(-\frac{M_2}{8\pi}\right)\frac{1}{2}\right] = R^2\left(\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{16} - \frac{M_2}{8\pi}\right)$$

$$I_{\bar{z}} = I_z = R^2\left(\frac{M_1}{2} - \frac{M_2}{8}\right)$$

$\bar{I}_{\bar{x}} > I_{\bar{y}} \Rightarrow a < b$

Ellissoide